

VETTORI E MATRICI

Concetti introduttivi e applicazioni alla grafica 3D

Parte I

di Daniele Petraccini

Per programmare una qualsiasi applicazione che impieghi grafica 3D, occorre avere una certa dimestichezza con alcuni concetti matematici di base: vettore, matrice, sistema di riferimento, coordinate omogenee, ecc.

Supponiamo di voler realizzare una semplice presentazione, ad esempio un logo tridimensionale che ruota e si sposta sullo schermo (potrebbe trattarsi di una scritta o di una forma geometrica); allo scopo immaginiamo di avvalerci del supporto delle *Direct3D*. Il primo problema che dobbiamo affrontare è la descrizione matematica dell'oggetto tridimensionale, il quale dovrà essere definito impiegando le primitive messe a disposizione dalle *Direct3D* stesse. La soluzione più ovvia è quella di immaginare la superficie dell'oggetto come composta da un certo numero di triangoli (che sono i poligoni più semplici); a sua volta, ogni triangolo resta individuato allorquando siano state assegnate le coordinate dei suoi vertici. E' chiaro che per svolgere questa prima operazione è sufficiente la conoscenza della nozione di *coordinate* di un punto rispetto ad un *sistema di riferimento tridimensionale*. Un po' più complicato è far ruotare l'oggetto attorno ad un asse: in questo caso occorre moltiplicare ogni singolo vertice (descritto mediante un *vettore*) per un'opportuna *matrice*; una generica matrice può essere vista come la caratterizzazione di un cambio di *base* all'interno di uno *spazio vettoriale*. Se inoltre desideriamo che la rotazione avvenga contemporaneamente ad una traslazione, possiamo *concatenare* le matrici di rotazione e traslazione per ottenere un'unica matrice risultante. Infine, la definizione della posizione e della orientazione di una telecamera – che ha la funzione di “osservare” la scena – è concettualmente analoga all'operazione di rototraslazione. Come se non bastasse le *Direct3D* richiedono di lavorare non con le usuali coordinate tridimensionali, ma con le *coordinate omogenee*, e dunque la posizione di un punto nello spazio è descritta da quattro valori!

Spero di non avervi spaventato... con l'esempio precedente ho solo voluto portare alla vostra attenzione l'importanza che la matematica gioca nell'ambito della grafica 3D, e come la conoscenza dei concetti cardine dell'algebra lineare sia indispensabile, anche qualora gli oggetti che volete gestire o le operazioni che intendete compiere su di essi siano apparentemente semplici.

In questo articolo vorrei fornire una introduzione ai concetti menzionati fino ad ora, sperando di trasmettere al lettore, che magari pur avendo una buona conoscenza relativa alla programmazione non ha mai avuto la possibilità di approfondire questioni di algebra lineare, almeno le basi fondamentali per scrivere del codice che consenta di gestire un “mondo tridimensionale”.

VETTORI

In questa prima sezione verranno introdotti i concetti fondamentali di vettore e di spazio vettoriale; illustreremo le definizioni e le principali proprietà che torneranno utili nel corso della trattazione.

Concetto di vettore libero

Nell'ambito della grafica 3D, l'insieme di lavoro è costituito dallo *spazio tridimensionale* ordinario, ente geometrico del quale tutti noi abbiamo una concezione intuitiva; al fine di introdurre concetti metrici, supponiamo di aver fissato al suo interno un'unità di misura.

Presi due punti distinti P e Q dello spazio, consideriamo il segmento PQ che li congiunge; se su quest'ultimo fissiamo un verso di percorrenza, ad esempio quello che va da P a Q, otteniamo un *segmento orientato*, che indichiamo con il simbolo \overrightarrow{PQ} (vedi figura 1).

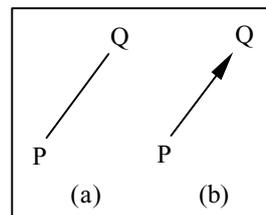


Fig. 1 Segmento PQ (a) e segmento orientato \overrightarrow{PQ} (b).

Un segmento orientato \overrightarrow{PQ} è un ente geometrico caratterizzato da quattro elementi:

- 1) *direzione*: coincide con la direzione della retta che congiunge i punti P e Q;
- 2) *verso*: è il senso che va da P a Q;
- 3) *modulo*: è la lunghezza del segmento rispetto all'unità di misura prefissata (si tratta di un numero reale positivo);
- 4) *punto di applicazione*: è il primo estremo, cioè il punto P.