VETTORI E MATRICI

Concetti introduttivi e applicazioni alla grafica 3D

Parte II

di Daniele Petraccini

VETTORI (segue dalla Parte I)

Nello scorso numero abbiamo trattato alcune questioni di base relative ai vettori liberi senza la necessità di individuare all'interno dello spazio punti particolari o direzioni privilegiate: l'unica ipotesi fatta è stata quella di supporre prefissata un'unità di misura.

Ora vogliamo utilizzare alcuni dei risultati mostrati per introdurre il concetto di coordinate di un vettore rispetto ad una base, premessa fondamentale per una trattazione *analitica* dei vettori.

Coordinate rispetto ad una base; spazio $\mathbb{R}^3$

Scegliamo nello spazio *V* dei vettori liberi tre vettori non complanari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Per il *teorema della base*, preso un qualunque vettore $\vec{v}$ è possibile individuare univocamente tre scalari k_1, k_2, k_3 tali che risulti:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + k_3 \cdot \vec{v}_3 . \qquad (1)$$

Le quantità k_1, k_2, k_3 sono dette *coordinate* (o *componenti*) del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Viceversa, assegnati tre scalari k_1, k_2, k_3, l'espressione $k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + k_3 \cdot \vec{v}_3$ definisce uno ed un solo vettore $\vec{v}$.

Ricordiamo per inciso che un insieme di tre grandezze scalari considerate in un ordine prefissato (come le quantità k_1, k_2, k_3 del caso in esame) è definito *terna ordinata di numeri reali* e viene indicato racchiudendo le grandezze stesse tra parentesi tonde:

$$(k_1, k_2, k_3) .$$

Se con $\mathbb{R}$ denotiamo l'insieme dei numeri reali, allora l'insieme costituito da tutte le terne ordinate di numeri reali viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(k_1, k_2, k_3),\ \text{con}\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R},\ k_3 \in \mathbb{R}\} .$$

Dalle considerazioni svolte sopra possiamo affermare che, una volta fissata una base in *V*, risulta individuata una *corrispondenza biunivoca* tra l'insieme dei vettori liberi *V* e l'insieme $\mathbb{R}^3$. In virtù di tale corrispondenza, possiamo interpretare una terna di numeri reali come una rappresentazione di un vettore libero.

Analizziamo un paio di esempi, che serviranno a chiarire quanto appena illustrato. Supponiamo innanzi tutto fissata in *V* la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

1) Quali sono le terne numeriche rappresentative dei vettori della base?

È facile vedere che la terna ordinata corrispondente al vettore $\vec{v}_1$ è $(1,0,0)$; risulta infatti:

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 .$$

In modo analogo, le rappresentazioni dei vettori $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono rispettivamente $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

2) Qual è il vettore $\vec{v}$ che corrisponde alla terna ordinata $(3,-1,5)$?

Si ha ovviamente:

$$\vec{v} = 3 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 5 \cdot \vec{v}_3 .$$

Procediamo ora ad analizzare i vantaggi che si ottengono dalla rappresentazione dei vettori in termini di terne numeriche. Consideriamo allo scopo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, le cui componenti, rispetto alla base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, siano rispettivamente date da (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3). Ci poniamo le seguenti domande:

1) quali sono le componenti del vettore $\vec{a} + \vec{b}$?
2) preso uno scalare h, quali sono le componenti del vettore $h \cdot \vec{a}$?

Per rispondere ai due quesiti è sufficiente eseguire i calcoli, facendo uso delle proprietà della *somma vettoriale* e del *prodotto per scalari* introdotte nello scorso numero.

Innanzi tutto, dalla definizione di componenti di un vettore rispetto ad una base, i due vettori assegnati possono essere scritti nel modo seguente:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 , \qquad (2)$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{v}_1 + b_2 \cdot \vec{v}_2 + b_3 \cdot \vec{v}_3 . \qquad (3)$$

Cerchiamo di rispondere alla prima domanda; usando le equazioni (2) e (3), possiamo esprimere la somma tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3) + \\ + (b_1 \cdot \vec{v}_1 + b_2 \cdot \vec{v}_2 + b_3 \cdot \vec{v}_3).$$

Per la proprietà associativa della somma tra vettori è possibile raggruppare i termini a secondo membro come segue:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{v}_1 + b_1 \cdot \vec{v}_1) + \\ + (a_2 \cdot \vec{v}_2 + b_2 \cdot \vec{v}_2) + \\ + (a_3 \cdot \vec{v}_3 + b_3 \cdot \vec{v}_3).$$

Infine, applicando ai termini tra parentesi la proprietà distributiva del prodotto per scalari rispetto alla somma vettoriale, si ottiene: